Przemoc
ul. Esseju 1, 01-234 Warszawa
XXX Liceum Ogólnokształcące w Warszawie
ul. Krwi, 22-222 Warszawa

Zadanie **1.** Rozwiązać w liczbach rzeczywistych x, y, z układ równań

$$\begin{cases} x^2 = yz + 1 \\ y^2 = zx + 2 \\ z^2 = xy + 4 \end{cases} \tag{1}$$

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, iż $x \neq y$, $y \neq z$ i $z \neq x$, gdyż inaczej dochodzimy do sprzeczności. Odejmując stronami równania (1) otrzymujemy:

$$\begin{cases} (x-y)(x+y+z) = -1 \\ (y-z)(x+y+z) = -2 \end{cases}$$

a więc $x + y + z \neq 0$. Przyrównując podwojoną lewą stronę pierwszej równości z lewą stroną drugiej, mamy:

$$2(x-y)(x+y+z) = (y-z)(x+y+z) \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 3y + z = 0$$

Podstawmy $z = 3y - 2x$ do pierwszej i trzeciej równości w (1).

$$\begin{cases} x^2 = y(3y-2x) + 1 \\ (3y-2x)^2 = xy + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2xy - 3y^2 = 1 \\ 4x^2 - 13xy + 9y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow 4x^2 - 13xy + 9y^2 = 4(x^2 + 2xy - 3y^2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 21y^2 - 21xy = 0 \Leftrightarrow y(y-x) = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

czyli $z = -2x$ i z drugiego równania (1) możemy napisać:

$$0 = x(-2x) + 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -1 \\ z = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ z = -2 \end{cases}$$

Wobec tego szukane rozwiązania (x, y, z) to $(-1, 0, 2)$ i $(1, 0, -2)$.

$\square$

Zadanie **2.** Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n > 1$, dla których wartość sumy $2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ jest potęgą liczby pierwszej o wykładniku naturalnym.

Rozwiązanie

Oznaczmy sumę $2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ przez S_n. Zgodnie z warunkami zadania:

$$S_n = p^d \qquad p \in \mathbb{P}, d \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Ze wzoru na sumę kwadratów $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ otrzymujemy, iż $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1$. Niech $k = n - 1$, wtedy

$$S_n = S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3) - 6}{6} = \frac{2k^3 + 9k^2 + 13k}{6} \tag{2}$$

Mamy więc, że $k \mid 6S_{k+1}$, a k możemy przedstawić w sposób jednoznaczny w postaci iloczynu potęg liczb pierwszych $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_1} \ldots p_j^{\alpha_j}$ (gdzie j to liczba różnych dzielników pierwszych k, a jeżeli ich nie ma, czyli $k = 1$, przyjmujemy $j = 1$ i $\alpha_1 = 0$). Pojawiają się przypadki:

$$\begin{array}{lrcl}
1. & 6 \nmid k & \Rightarrow & k \mid S_{k+1} \\
2. & 2 \mid k,\ 3 \nmid k & \Rightarrow & \frac{k}{2} \mid S_{k+1} \\
3. & 2 \nmid k,\ 3 \mid k & \Rightarrow & \frac{k}{3} \mid S_{k+1} \\
4. & 6 \mid k & \Rightarrow & \frac{k}{6} \mid S_{k+1}
\end{array}$$

a ponieważ zachodzi równość (1), $p \mid k$, więc k może być tylko postaci ℓ, 2ℓ, 3ℓ lub 6ℓ, gdzie $\ell \in \{n : n = p^k, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ i $\ell \mid p^d$.

Niech $t \in \{1, 2, 3, 6\}$. Z (1) i (2) mamy

$$2(\ell t)^3 + 9(\ell t)^2 + 13\ell t = 6p^d$$

Skoro $t \mid 6$ i $\ell \mid p^d$ jest to równoważne

$$2\ell^2 t^2 + 9\ell t + 13 = \frac{6}{t} \cdot \frac{p^d}{\ell} \tag{3}$$

Przypadek 1. $\ell = 1$

$$2t^2 + 9t + 13 = \frac{6}{t} \cdot p^d$$

Z tego równania mamy 4 rozwiązania:

$$\begin{array}{llcl}
1. & t = 1 & \Rightarrow & n = 2, p^d = 2^2 \\
2. & t = 2 & \Rightarrow & n = 3, p^d = 13^1 \\
3. & t = 3 & \Rightarrow & n = 4, p^d = 29^1 \\
4. & t = 6 & \Rightarrow & n = 7, p^d = 139^1
\end{array}$$

Przypadek 2. $\ell \geqslant 2$

Prawa strona równania (3) dzieli się przez p oraz $p \mid \ell$, czyli $p \mid 13 \Leftrightarrow p = 13$, wobec czego przedstawmy ℓ w postaci 13^α w tym równaniu i podzielmy jego obie strony przez 13. Wówczas otrzymamy

$$2 \cdot 13^{2\alpha-1} t^2 + 9 \cdot 13^{\alpha-1} t + 1 = \frac{6}{t} \cdot 13^{d-\alpha-1}$$

Dla $a > 1$ otrzymujemy sprzeczność, ponieważ obie strony tej równości nie przystają do siebie modulo 13. Natomiast dla $a = 1$ mamy

$$26t^2 + 9t + 1 = \frac{6}{t} \cdot 13^{d-2} \quad \Rightarrow \quad 9t + 1 \equiv 0 \pmod{13} \quad \Leftrightarrow \quad 4t \equiv 1 \pmod{13}$$

co nie zachodzi dla żadnego $t \in \{1, 2, 3, 6\}$.

Jedyne liczby naturalne n spełniające warunki zadania to: 2, 3, 4 i 7.

$\square$

Przemoc
ul. Esseju 1, 01-234 Warszawa
XXX Liceum Ogólnokształcące w Warszawie
ul. Krwi, 22-222 Warszawa

Zadanie **3.** W trójkącie ostrokątnym ABC punkt D jest rzutem prostokątnym punktu C na prostą AB. Punkt E jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą BC. Punkt F leży na odcinku DE, przy czym

$$\frac{EF}{FD}=\frac{AD}{DB}$$

Wykazać, że proste CF i AE są prostopadłe.

Rozwiązanie

Umieśćmy trójkąt ABC w płaszczyźnie zespolonej w taki sposób, aby jego podstawa AB leżała na osi rzeczywistej, a wierzchołek C i jego rzut prostokątny na prostą AB leżały na osi urojonej. Oznaczmy przez $\Re(z)$ i $\Im(z)$ odpowiednio część rzeczywistą i urojoną liczby zespolonej z. Niech $A=-a$, $B=b$, $C=ci$, gdzie $a,b,c\in\mathbb{R}_+$. Wówczas $D=0$, a E wyraża się następująco:

$$E:\begin{cases} E\in \mathrm{L}(\overline{BC}) \\ \mathrm{L}(\overline{DE})\perp \mathrm{L}(\overline{BC})\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\mathrm{L}(\overline{BE})\parallel \mathrm{L}(\overline{BC})\\ \mathrm{L}(\overline{DE})\perp\mathrm{L}(\overline{BC})\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Im(\frac{E-B}{C-B})=0\\ \Re(\frac{E-D}{C-B})=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Im(\frac{E-b}{-b+ci})=0\\ \Re(\frac{E}{-b+ci})=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Re(\frac{E(b+ci)}{-b^2-c^2})=0\\ \Im(\frac{(E-b)(b+ci)}{-b^2-c^2})=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Re(E)b=\Im(E)c\\ (\Re(E)-b)c=-b\cdot\Im(E)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\Re(E)-b}{\Re(E)}=-\frac{b^2}{c^2}\\ \Im(E)=\frac{b}{c}\Re(E)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Re(E)(c^2+b^2)=bc^2\\ \Im(E)=\frac{b}{c}\Re(E)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Re(E)=\frac{bc^2}{b^2+c^2}\\ \Im(E)=\frac{b^2c}{b^2+c^2}\end{cases}\Leftrightarrow E=\frac{bc}{b^2+c^2}(c+bi)\qquad(1)$$

Mając punkt E możemy znaleźć punkt F:

$$F:\begin{cases}F\in\mathrm{L}(\overline{DE})\\ \frac{\overline{EF}}{\overline{FD}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{L}(\overline{DF})\parallel\mathrm{L}(\overline{DE})\\ \frac{|E-F|}{|F-D|}=\frac{|D-A|}{|B-D|}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Im(\frac{F-D}{E-D})=0\\ \frac{|E-F|}{|F|}=\frac{|-A|}{|B|}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Im(\frac{\Re(F)+\Im(F)i}{c+bi})=0\\ \frac{|E-F|}{|F|}=\frac{a}{b}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Im(F)c=\Re(F)b\\ \frac{|E-F|}{|F|}=\frac{a}{b}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Im(F)=\frac{b}{c}\Re(F)\\ \left|\frac{\frac{\Re(E)}{c}(c+bi)-\Re(F)(1+\frac{b}{c}i)}{\Re(F)(1+\frac{b}{c}i)}\right|=\frac{a}{b}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Im(F)=\frac{b}{c}\Re(F)\\ \frac{\frac{\Re(E)}{c}-\frac{\Re(F)}{c}}{\frac{\Re(F)}{c}}=\frac{a}{b}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Im(F)=\frac{b}{c}\Re(F)\\ \Re(E)-\Re(F)=\frac{a}{b}\Re(F)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Re(F)=\frac{b^2c^2}{(a+b)(b^2+c^2)}\\ \Im(F)=\frac{b^3c}{(a+b)(b^2+c^2)}\end{cases}\Leftrightarrow F=\frac{b^2c}{(a+b)(b^2+c^2)}(c+bi)\qquad(2)$$

Teraz aby wykazać, że $\mathrm{L}(\overline{CF})\perp\mathrm{L}(\overline{AE})$, potrzeba i wystarcza, aby dowieść, że $\Re(\frac{E-A}{C-F})=0$. Zauważmy najpierw z (1) i (2), że $F=\frac{b}{a+b}E$, a $\Im(E)=\frac{b}{c}\Re(E)$. Dla ułatwienia zdefiniujmy symbol podobieństwa $\simeq$ między liczbami jak następuje: $a\simeq b\Leftrightarrow a=\xi b$, gdzie $a,b,\xi\in\mathbb{R},\xi\neq 0$. Oznaczmy $\Re(E)$ przez r. Wówczas

$$\Re\left(\frac{E-A}{C-F}\right)=\Re\left(\frac{E+a}{ci-\frac{b}{a+b}E}\right)=\Re\left(\frac{a+r(1+\frac{b}{c}i)}{ci-\frac{b}{a+b}\cdot r(1+\frac{b}{c}i)}\right)\simeq$$

$$\simeq\Re\left(\left((r+a)+\frac{br}{c}i\right)\left(-\frac{br}{a+b}-\left(c-\frac{b^2r}{c(a+B)}\right)i\right)\right)=(r+a)\left(-\frac{br}{a+b}\right)+\frac{br}{c}\left(c-\frac{b^2r}{c(a+b)}\right)\simeq$$

$$\simeq-\frac{r+a}{a+b}+\frac{1}{c}\left(c-\frac{b^2r}{c(a+b)}\right)\simeq c(b-r)-\frac{b^2r}{c}\simeq bc^2-r(b^2+c^2)\xlongequal{r=\frac{bc^2}{b^2+c^2}}0$$

c.n.d.

Uwaga 1

W rozwiązaniu skorzystaliśmy z wektorowej interpretacji różnicy liczb zespolonych oraz z własności wynikających ze wzoru na iloraz liczb zespolonych ($\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$):
$\varphi_1-\varphi_2=\frac{k\pi}{2}\Leftrightarrow\Im(\frac{z_1}{z_2})=0$ i $\varphi_1-\varphi_2=\frac{(2k+1)\pi}{2}\Leftrightarrow\Re(\frac{z_1}{z_2})=0$, gdzie $k\in\mathbb{Z}$.

Uwaga 2

Wykazaliśmy więcej niż wymagało zadanie, ponieważ nie zakładaliśmy, że trójkąt ABC jest ostrokątny.

□

Zadanie **4.** Dana jest dodatnia liczba całkowita n oraz dodatnie liczby rzeczywiste a, b. Wyznaczyć największą możliwą wartość sumy

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n \tag{1}$$

gdy $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ są liczbami z przedziału $\langle 0; 1\rangle$, spełniającymi warunki

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant a, \qquad y_1 + y_2 + \ldots + y_n \leqslant b \tag{2}$$

Rozwiązanie

Bez straty ogólności rozważań możemy przyjąć, że $a \leqslant b$, gdyż wówczas w rozwiązaniu będzie wystarczyło zamienić a przez $\min(a, b)$ i b przez $\max(a, b)$, aby otrzymać ogólne wyniki. Rozpatrzmy następujące przypadki:

Przypadek 1. $n \leqslant a$

Niech x_i i y_i przyjmują maksymalne dozwolone wartości, a więc $x_i = y_1 = 1$ (dla $i = 1, 2, \ldots, n$). Największa możliwa wartość sumy (1) w tym przypadku wynosi n, czyli ogólniej $\min(a, b, n)$.

Przypadek 2. $a < n \leqslant b$

Niech x_i sumują się do a (nie mogą przyjmować maksymalnych wartości, bo by sumowały się do n, co byłoby sprzeczne z (2), bo $a < n$), a y_i przyjmują maksymalne dozwolone wartości, a więc $\sum_{i=1}^{n} x_i = a$ i $y_i = 1$ (dla $i = 1, 2, \ldots, n$). Największa możliwa wartość sumy (1) w tym przypadku wynosi a, czyli ogólniej $\min(a, b, n)$.

Przypadek 3. $b < n$

Twierdzę, iż jeżeli zapełnimy początkowe x_i jedynkami, następny - tym co zostanie, a resztę zerami i analogicznie postąpimy z y_i, czyli

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{[a]} = 1, \quad x_{[a]+1} = a - [a], \quad x_{[a]+2} = \ldots = x_n, \tag{3}$$

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_{[b]} = 1, \quad y_{[b]+1} = b - [b], \quad y_{[b]+2} = \ldots = y_n \tag{4}$$

wówczas otrzymana suma (1), tj.

$$\sum_{i=1}^{n} x_iy_i = \begin{cases} [a] + (a - [a])(b - [a]) & \text{gdy } [a] = [b] \\ a & \text{gdy } [a] < [b] \end{cases}$$

którą możemy zapisać jednym wyrażeniem

$$\sum_{i=1}^{n} x_iy_i = [a] + (a - [a]) \min(b - [a], 1)$$

jest największą możliwa wartością sumy (1), tzn. iż każda modyfikacja układu (3) i (4), co najwyżej nie zmniejsza tej sumy.

Dowód

Niech $x'_m = x_m$ i $y'_m = y_m$ (dla $m = 1, 2, \ldots, n$), a więc x'_m i y'_m spełniają warunki (2). Na mocy (2) każda zmiana zachowująca *maksymalne* warunki zadania (pomijam możliwość samego zmniejszenia wyrazów, która oczywiście daje mniejszą sumę), sprowadza się do zmniejszenia jednego wyrazu i zwiększenia o tyle samo drugiego. Zdefiniujmy możliwość istnienia jednoczesnej zmiany w x_m, y_m i samą zmianę.

$$\bigvee_{\substack{i,j\\ i<j}} \bigvee_{\substack{k,l\\ k<l}} (x_i = 1 \wedge x_j < 1 \wedge y_k = 1 \wedge y_l < 1) \Rightarrow (x'_i = 1 - c \wedge x'_j = x_j + c \leqslant 1 \wedge y'_k = 1 - d \wedge y'_l = y_l + d \leqslant 1) \tag{5}$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$S = \sum_{m=1}^{n} x_my_m, \qquad S' = \sum_{m=1}^{n} x'_my'_m$$

Wypiszmy jeszcze ważne własności z (3), (4) i (5), z których będziemy korzystać:

$$\bigwedge_{\substack{p,q \\ p\geqslant q}} x_p \leqslant x_q \leqslant 1 \wedge y_p \leqslant y_q \leqslant 1, \qquad i<j, \qquad k<l, \qquad x_j+c\leqslant 1, \qquad y_l+d\leqslant 1$$

Na mocy (5) mamy 4 następujące możliwości jednoczesnej modyfikacji x_m i y_m.

Możliwość 1. $i=k,\ j=l$

$$\begin{aligned} S'-S &= (x_i-c)(y_k-d)-x_iy_k+(x_j+c)(y_l+d)-x_jy_l \\ &= (1-c)(1-d)-1+(x_j+c)(y_l+d)-x_jy_l = cd-c-d+cy_1+dx_j+cd \\ &= c(y_l+d-1)+d(x_j+c-1) \\ &\leqslant 0 \end{aligned}$$

Możliwość 2. $i\neq k,\ j=l$ ($\Rightarrow k<j \Rightarrow x_k=1$)

$$\begin{aligned} S'-S &= (x_i-c)y_i-x_iy_i+x_k(y_k-d)-x_ky_k+(x_j+c)(y_l+d)-x_jy_l \\ &= (1-c)-1+(1-d)-1+(x_j+c)(y_l+d)-x_jy_l = -c-d+cy_l+dx_j+cd \\ &= c(y_l-1)+d(x_j-1+c) \leqslant -cd+d(x_j+c-1) \\ &= d(x_j-1) \\ &\leqslant 0 \end{aligned}$$

Możliwość 3. $i=k,\ j\neq l$

$$\begin{aligned} S'-S &= (x_i-c)(y_k-d)-x_iy_k+(x_j+c)y_j-x_jy_j+x_l(y_l+d)-x_ly_l \\ &= (1-c)(1-d)-1+(x_j+c)y_j-x_jy_j+x_l(y_l+d)-x_ly_l = cd-c-d+cy_j+dx_l \\ &= c(y_j+d-1)+d(x_l-1) \\ &= \begin{cases} c(d-1)+d(x_l-1) & \text{gdy } l=[a]+1 \Rightarrow [a]=[b] \Rightarrow j>l \Rightarrow y_j=0 \\ c(y_j-1)+d(c-1) & \text{gdy } l>[a]+1 \Rightarrow x_l=0) \end{cases} \\ &\leqslant 0 \end{aligned}$$

Możliwość 4. $i\neq k,\ j\neq l$

$$\begin{aligned} S'-S &= (x_i-c)y_i-x_iy_i+x_k(y_k-d)-x_ky_k+(x_j+c)y_j-x_jy_j+x_l(y_l+d)-x_ly_l \\ &= (1-c)-1+x_k(1-d)-x_k+(x_j+c)y_j-x_jy_j+x_l(y_l+d)-x_ly_l = -c-dx_k+cy_j+dx_l \\ &= c(y_j-1)+d(x_l-x_k) \\ &\leqslant 0 \end{aligned}$$

Tak więc dowód twierdzenia został zakończony.

Największa możliwa wartość sumy (1), takiej że $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n \in \langle 0;1\rangle$ i spełniają (2), wynosi:

$$\max\Big(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\Big) = \begin{cases} \min(m,n) & \text{gdy } n\leqslant M \\ [m]+(m-[m])\min(M-[m],1) & \text{gdy } n>M \end{cases} \qquad \text{gdzie } \begin{cases} m=\min(a,b) \\ M=\max(a,b) \end{cases}$$

□

Przemoc
ul. Esseju 1, 01-234 Warszawa
XXX Liceum Ogólnokształcące w Warszawie
ul. Krwi, 22-222 Warszawa

Zadanie **5.** Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, a okręgi wpisane w trójkąty ABC i BCD mają równe promienie. Rozstrzygnąć, czy z tych założeń wynika, że także okręgi wpisane w trójkąty CDA i DAB mają równe promienie.

Rozwiązanie

Udowodnimy najpierw lemat korzystający z pewnego faktu, którego prawdziwość również wykażemy.

Fakt

Weźmy dowolny trójkąt. Przez r i R oznaczmy odpowiednio promienie okręgów wpisanego i opisanego na nim, przez α, β, γ miary jego kąty wewnętrznych, a, b, c długości boków leżacych na przeciw tych kątów, a S jego pole. Zachodzi:

$$\frac{r}{R} = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - 1$$

Aby to dowieść, będziemy przekształcać to równanie tożsamościowo, korzystając ze wzorów na promień okręgu wpisanego i opisanego na trójkącie, twierdzenia cosinusów oraz ze wzoru Herona.

$$\frac{r}{R} = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\frac{2S}{a+b+c}}{\frac{abc}{4S}} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} - 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{16S^2}{a+b+c} = a(b^2+c^2-a^2) + b(a^2+c^2-b^2) + c(a^2+b^2-c^2) - 2abc \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (-a+b+c)(a-b+c)(a+b+c) = a(b^2+c^2-a^2) + b(a^2+c^2-b^2) + c(a^2+b^2-c^2) - 2abc \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (a^2-b^2-c^2+2bc)(-a+b+c) = a(b^2+c^2-a^2-2bc) + b(a^2+c^2-b^2) + c(a^2+b^2-c^2) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2b + a^2c - b^3 - b^2c - bc^2 - c^3 + 2b^2c + 2bc^2 = a^2b + bc^2 - b^3 + a^2c + b^2c - c^3 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0$$

Tym samym wykazaliśmy prawdziwość faktu.

Lemat

Jeżeli dwa trójkąty mają równe długości podstaw, promienie okręgów wpisanych i opisanych, to są to trójkąty przystające.

Dowód lematu

Rozważmy dwa trójkąty ABC_1 i ABC_2 spełniające założenie lematu. Mają one równej miary kąty $\alpha = |\sphericalangle AC_1B| = |\sphericalangle AC_2B|$, oparte na tym samym łuku AB. Niech r, R będą odpowiednio promieniami okręgów wpisanych i opisanych na tych trójkątach. Wprowadźmy oznacznia: $|\sphericalangle ABC_1| = \varphi_1$, $|\sphericalangle ABC_2| = \varphi_2$, czyli $|\sphericalangle C_1AB| = \pi - (\varphi_1 + \alpha)$ oraz $|\sphericalangle C_2AB| = \pi - (\varphi_2 + \alpha)$. Z przytoczonego wcześniej faktu oraz ze wzoru na różnicę cosinusów mamy:

$$\frac{r}{R} = \cos\alpha + \cos\varphi_1 + \cos(\pi - (\varphi_1 + \alpha)) - 1 = \cos\alpha + \cos\varphi_2 + \cos(\pi - (\varphi_2 + \alpha)) - 1$$

$$\cos\varphi_1 - \cos(\varphi_1 + \alpha) = \cos\varphi_2 - \cos(\varphi_2 + \alpha)$$

$$-2\sin\frac{\alpha + 2\varphi_1}{2}\sin(-\frac{\alpha}{2}) = -2\sin\frac{\alpha + 2\varphi_2}{2}\sin(-\frac{\alpha}{2})$$

$$\frac{\alpha + 2\varphi_1}{2} = \frac{\alpha + 2\varphi_2}{2} + 2k\pi \quad \vee \quad \frac{\alpha + 2\varphi_1}{2} = \pi - \frac{\alpha + 2\varphi_2}{2} + 2k\pi$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi \quad \vee \quad \varphi_1 = \pi - (\varphi_2 + \alpha) + 2k\pi$$

Kąty $\varphi_1, \varphi_2 \in (0, \pi)$, więc przy ustalonym φ_1, $\varphi_2 = \varphi_1$ lub $\varphi_2 = \pi - (\varphi_1 + \alpha)$. Są to więc trójkąty przystające. Dowód lematu został zakończony.

Na mocy powyższego lematu $\triangle ABC \equiv \triangle DCB$, a więc $ABCD$ jest trapezem równoramiennym i $\triangle CDA \equiv \triangle BAD$, czyli trójkąty CDA i DAB mają równe promienie okręgów wpisanych.

□

Przemoc
ul. Esseju 1, 01-234 Warszawa
XXX Liceum Ogólnokształcące w Warszawie
ul. Krwi, 22-222 Warszawa

Zadanie **6.** Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończony ciąg liczb naturalnych $a_1, a_2, a_3, \ldots$ spełniający równanie

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+2}} \qquad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{1}$$

Rozwiązanie

Załóżmy, że taki ciąg istnieje. Jest to ciąg rosnący, bo z (1) mamy, że $\frac{1}{a_n} > \frac{1}{a_{n+1}}$, a więc $a_{n+1} > a_n$ dla każdego $n = 1, 2, \ldots$. Istnieje więc też nieskończony ciąg $(\frac{1}{a_n})$, oznaczmy go przez (b_n), który jest ciągiem malejącym i jego wyrazy zawarte są w przedziale otwartym $(0; 1)$, czyli jest to ciąg zbieżny. Na mocy (1) spełnia on następującą równość:

$$b_n = b_{n-2} - b_{n-1} \qquad \text{dla} \quad n = 3, 4, \ldots \tag{2}$$

Twierdzę, iż n-ty wyraz ciągu (b_n) wyraża się wzorem:

$$b_n = (-1)^n (F_{n-1} b_2 - F_{n-2} b_1) \qquad \text{dla} \quad n = 3, 4, \ldots \tag{3}$$

gdzie F_n to n-ty wyraz ciągu Fibonacciego.

Dowód tego wzoru jest indukcyjny. Dla $n = 3$ otrzymujemy równość (1) daną w zadaniu. Załóżmy słuszność (3) dla wszystkich $n \leqslant n_0$. Wówczas dla $n = n_0$ korzystając z założenia indukcyjnego, wzoru $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ oraz (2) możemy zapisać $(n+1)$-wyraz ciągu (b_n) następująco:

$$\begin{aligned} b_{n+1} = b_{n-1} - b_n &= (-1)^{n-1}(F_{n-2} b_2 - F_{n-3} b_1) - (-1)^n (F_{n-1} b_2 - F_{n-2} b_1) \\ &= (-1)^{n-1}((F_{n-2} + F_{n-1}) b_2 - (F_{n-3} + F_{n-2}) b_1) \\ &= (-1)^{n+1}(F_n b_2 - F_{n-1} b_1) \end{aligned} \tag{4}$$

To kończy przejście indukcyjne. Na mocy zasady indukcji wynosimy, że równość (3) zachodzi dla wszystkich naturalnych $n \geqslant 3$. Tak więc

$$a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1}{(-1)^n (\frac{F_{n-1}}{a_2} - \frac{F_{n-2}}{a_1})} = (-1)^n \frac{a_1 a_2}{F_{n-1} a_1 - F_{n-2} a_2} \tag{5}$$

Policzmy granicę ciągu (a_n), korzystając z otrzymanego wzoru i tego, że $a_n \in \mathbb{N}$ oraz $\phi \notin \mathbb{Q}$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{a_1 a_2}{F_{n-1} a_1 - F_{n-2} a_2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{F_{n-2}} \cdot \frac{a_1 a_2}{\frac{F_{n-1}}{F_{n-2}} a_1 - a_2} = \frac{a_1 a_2}{\phi\, a_1 - a_2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{F_{n-2}} = 0$$

Otrzymaliśmy granicę równą 0 co jest sprzeczne z tym, że ciąg liczb naturalnych (a_n) jest rosnący. Wobec tego nasze założenie było błędne, czyli nie istnieje nieskończony ciąg (a_n) spełniający warunek (1).

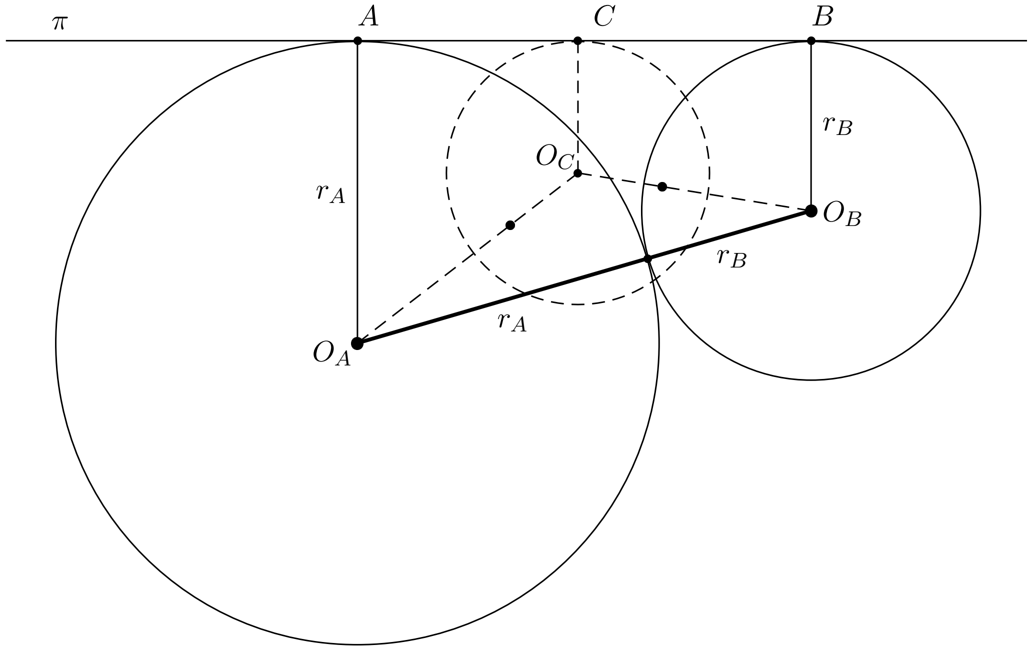
□

Uwaga

Przez ϕ oznaczyliśmy zwyczajowo złoty podział odcinka wynoszący $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Skorzystaliśmy również ze zbieżności ciągu $(\frac{F_{n+1}}{F_n})$, którego granica wynosi własnie ϕ co teraz wykażemy. Niech $g = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$. Wówczas mamy też $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{g}$, a więc $g = 1 + \frac{1}{g} \Leftrightarrow g^2 - g - 1 = 0 \Rightarrow g = \phi$. Drugi pierwiastek $(1 - \phi)$ odrzuciliśmy, ponieważ $F_n \in \mathbb{N}$.

Zadanie **7.** Trzy sfery, parami styczne zewnętrznie, są styczne do pewnej płaszczyzny w punktach A, B, C. Znając długości odcinków $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, obliczyć promienie tych sfer.

Rozwiązanie



Oznaczmy przez r_A, r_B, r_C odpowiednio promienie sfer o punktach styczności A, B, C do pewnej płaszczyzny π. Zamieszczony powyżej rysunek prezentuje na pierwszym planie dwie ze sfer (jest to rzut na płaszczyznę prostopadłą do π i równoległą do odcinka O_AO_B). Dla pozostałych układów sfer rysunki wyglądałyby analogicznie. Na mocy twierdzenia Pitagorasa mamy następujący układ równań, który rozwiązujemy:

$$\begin{cases} a^2 + (r_B - r_C)^2 = (r_B + r_C)^2 \\ b^2 + (r_A - r_C)^2 = (r_A + r_C)^2 \\ c^2 + (r_A - r_B)^2 = (r_A + r_B)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4r_Br_C \\ b^2 = 4r_Ar_C \\ c^2 = 4r_Ar_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_B = \frac{a^2}{b^2}r_A \\ r_C = \frac{b^2}{4r_A}r_A = \frac{c^2}{4r_B} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_A = \frac{bc}{2a} \\ r_B = \frac{ac}{2b} \\ r_C = \frac{ab}{2c} \end{cases}$$

Promienie sfer stycznych w punktach A, B, C do pewnej płaszczyzny, wynoszą odpowiednio $\frac{bc}{2a}$, $\frac{ac}{2b}$ i $\frac{ab}{2c}$.

□

Przemoc
ul. Esseju 1, 01-234 Warszawa
XXX Liceum Ogólnokształcące w Warszawie
ul. Krwi, 22-222 Warszawa

Zadanie **8.** Na okręgu jest umieszczonych n lampek; każda może być włączona albo wyłączona. Wykonujemy serię ruchów; w każdym ruchu wybieramy k kolejnych lampek i zmieniamy ich stan: wyłączone włączamy, a włączone wyłączamy (liczba k nie zmienia się w trakcie tego postępowania). Na początku wszystkie lampki są wyłączone.
Dla ustalonej liczby naturalnej n wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $k \leqslant n$, dla których jest możliwe uzyskanie stanu z dokładnie jedną lampką włączoną.

Rozwiązanie

Zauważmy, że k *musi być nieparzyste*, ponieważ w przeciwnym przypadku parzystość liczby zapalonych lampek byłaby niezmiennikiem. Działoby się tak, gdyż po zapaleniu k parzystych lampek, w następnym i jeszcze kolejnych ruchach byśmy gasili i i zapalali j (gdzie $i + j = k$ i są różne dla każdego ruchu), a więc albo i i j byłyby obie parzyste albo nieparzyste ($2 \mid j - i$), czyli zmiana zapalonych lampek byłaby w tym przypadku zawsze parzysta, a więc niemożliwe byłoby otrzymanie tylko jednej palącej się lampki.

Załóżmy, że po pierwszym ruchu, w każdym następnym zmieniamy stan kolejnych k lampek, kolejnych po przednio zmienianych, tak więc nie mamy tu dowolności wyboru nowych k lampek, tylko wciąż „chodzimy" w kółko. Wówczas licząc od początku, zrobienie 1 pełnego okrążenia (i ani lampki więcej) jest równoważne zapaleniu wszystkich lampek, a zrobienie 2 okrążeń - powrót do sytuacji początkowej, a więc wszystkie lampki są wtedy wyłączone. Sytuacja powtarza się cyklicznie, a więc zapalenie dokładnie jednej lampki jest możliwe dla takich k, dla których istnieje liczba naturalna l, która po pomnożeniu przez dane k dzieli się przez $2n$ z resztą 1. Jeżeli przez K_n oznaczymy zbiór takich właśnie k, możemy napisać:

$$\bigwedge_{k \in K_n} \bigvee_{l \in \mathbb{N}} kl \equiv 1 \pmod{2n} \quad \Leftrightarrow \quad \bigwedge_{k \in K_n} \bigvee_{l,m \in \mathbb{N}} kl - 2mn = 1$$

Na mocy twierdzenia o istnieniu formy liniowej dla NWD ($a, b, \xi, \eta \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{NWD}(a, b) = a\xi + b\eta$)[1] oznacza to:

$$\bigwedge_{k \in K_n} \mathrm{NWD}(k, 2n) = 1$$

Otrzymaliśmy, że aby w kółko po kolei zmieniając stany seriami po k lampek, otrzymać tylko jedną włączoną lampkę, k musibyć nieparzyste i względnie pierwsze z n.

Twierdzę, iż jeżeli nie możliwe jest zapalenie dokładnie jednej lampki sposobem zdefiniowanym powyżej, to nie jest możliwe wogóle.

Istotnie wówczas $\mathrm{NWD}(k, 2n) = \mathrm{NWD}(k, n) = t > 1$ (pamiętajmy, że k jest nieparzyste). Ponumerujmy kolejno lampki od 1 do n. Zgrupujmy je i niech $A_i = \{i, t + i, 2t + i, \ldots, n - t + i\}$, a przez S_i oznaczmy liczbę zapalonych lampek w grupie A_i, dla $i = 1, 2, \ldots, t$. Po zapaleniu na początku dowolnych k kolejnych lampek $S_1 = S_2 = \ldots = S_t = \frac{k}{t}$, a wiec $S_1 \equiv S_2 \equiv \ldots \equiv S_t \pmod 2$. W każdym ruchu zmieniając stan dowolnego innego układu k kolejnych lampek, zmieniamy w każdej grupie A_i stan $\frac{k}{t}$ lampek. Jeżeli $\frac{k}{t}$ jest nieparzyste, to w każdej z grup A_i gasimy nieparzystą ilość lampek i zapalamy parzystą albo odwrotnie, a więc zmiana liczby zapalonych lampek w *każdej* z grup A_i jest nieparzysta. Natomiast jeżeli $\frac{k}{t}$ jest parzyste, to w każdej z grup A_i gasimy i zapalamy parzystą ilość lampek lub gasimy i zapalamy nieparzystą ilość lampek, a więc zmiana liczby zapalonych lampek w *każdej* z grup A_i jest parzysta. Otrzymaliśmy więc, że z początkowego przystawania liczb $S_1, S_2, \ldots, S_n$ modulo 2, wynika ich dalsze przystawanie po dowolnej serii ruchów, a więc przystawanie wszystkich liczb S_i modulo 2 jest niezmiennikiem. Tym samym nie jest możliwe doprowadzenie do sytuacji z jedną zapaloną lampką, w której to grupie jakby się znajdowała byłaby nieparzysta liczba zapalonych lampek, a w pozostałych parzysta (równa 0).

Sformułujmy ostateczną odpowiedź:
Dla ustalonej liczby n wszystkie liczby naturalne $k \leqslant n$, dla których jest możliwe uzyskanie stanu z dokładnie jedną lampką włączoną, to liczby nieparzyste względnie pierwsze z n.

□

[1] Dowód tego twierdzenia można znaleźć m.in. w: W. Sierpiński, *Teoria liczb*, PWN, Warszawa-Wrocław 1950

Zadanie **9.** Wyznaczyć wsztstkie liczby rzeczywiste a, dla których ciąg (x_n) określony wzorami

$$x_0 = \sqrt{3}, \quad x_{n+1} = \frac{1 + ax_n}{a - x_n} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots$$

spełnia warunek $x_{n+8} = x_n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że jeżeli wprowadzimy następujące ciągi:

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{2i} a^{k-2i}(-1)^i, \qquad b_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{2i+1} a^{k-(2i+1)}(-1)^i$$

przyjmując że $\binom{n}{m} = 0$ dla $m > n$, to możemy znaleźć następujący wzór:

$$x_{n+k} = \frac{c_k x_n + b_k}{c_k - b_k x_n} \tag{1}$$

Dowód tego wzoru jest indukcyjny. Dla $k = 1$ z definicji (c_k) i (b_k) otrzymujemy równość daną w zadaniu:

$$x_{n+1} = \frac{1 + ax_n}{a - x_n} \tag{2}$$

Załóżmy słuszność (1) dla wszystkich $n \leqslant n_0$. Wówczas dla $n = n_0$ korzystając z (2) możemy zapisać $(n+1)$-wyraz ciągu (x_n) następująco:

$$x_{n+k+1} = \frac{1 + ax_{n+k}}{a - x_{n+k}} = \frac{1 + a \cdot \frac{c_k x_n + b_k}{a_k - b_k x_n}}{a - \frac{c_k x_n + b_k}{a_k - b_k x_n}} = \frac{(ac_k - b_k)x_n + (ab_k + c_k)}{(ac_k - b_k) - (ab_k + c_k)x_n} \tag{3}$$

przy założeniu, że $a_k - b_k x_n \neq 0$. Wystarczy więc wykazać, że $c_{k+1} = ac_k - b_k$ i $b_{k+1} = ab_k + c_k$. Korzystając ze wzoru $\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
ac_k - b_k &= a\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{2i}a^{k-2i}(-1)^i\right) - \left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{2i+1}a^{k-(2i+1)}(-1)^i\right) = \\
&= a^{k+1} + \left(\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{2i}a^{k-2i+1}(-1)^i\right) - \left(\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{2i+1}a^{k-2i-1}(-1)^i\right) - \binom{k}{2k+1}a^{-k-1}(-1)^{2k+1} = \\
&= a^{k+1} + \left(\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{2i}a^{k-2i+1}(-1)^i\right) - \left(\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{2i-1}a^{k-2i+1}(-1)^{i+1}\right) = \\
&= a^{k+1} + \sum_{i=1}^{k}\binom{k+1}{2i}a^{k-2i+1}(-1)^i = \sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{2i}a^{k+1-2i}(-1)^i = \\
&= c_{k+1} \\
ab_k + c_k &= a\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{2i+1}a^{k-(2i+1)}(-1)^i\right) + \left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{2i}a^{k-2i}(-1)^i\right) = \\
&= \sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{2i+1}a^{k-2i}(-1)^i = \sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{2i+1}a^{k+1-(2i+1)}(-1)^i = \\
&= b_{k+1}
\end{aligned}$$

To kończy przejście indukcyjne. Na mocy zasady indukcji wynosimy, że równość (1) zachodzi dla wszystkich naturalnych $k \geqslant 0$.

Na to aby $x_{n+8} = x_n$ potrzeba i wystarcza aby

$$x_n = \frac{c_8 x_n + b_8}{c_8 - b_8 x_n} \quad \Leftrightarrow \quad x_n(c_8 - b_8 x_n) = c_8 x_n + b_8 \quad \Leftrightarrow \quad b_8(1 + x_n^2) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=0}^{8} \binom{8}{2i+1} a^{8-(2i+1)}(-1)^i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \binom{8}{1} a^7 - \binom{8}{3} a^5 + \binom{8}{5} a^3 - \binom{8}{7} a = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad a(8a^6 - 8 \cdot 7a^4 + 8 \cdot 7a^2 - 8) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a(a-1)(a+1)((a^2)^2 - 6(a^2) + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad a(a-1)(a+1)(a^2 - (3 - 2\sqrt{2}))(a^2 - (3 + 2\sqrt{2}))$$

$$\Updownarrow$$

$$a \in \left\{ -1 - \sqrt{2}, -1, 1 - \sqrt{2}, 0, \sqrt{2} - 1, 1, 1 + \sqrt{2} \right\}$$

Powyższy zbiór wartości, do którego musi należeć a, aby ciąg (x_n) spełniał warunki zadania, jest zbiorem rozwiązań zadania.

$\square$

Zadanie **10.** Spośród wszystkich podzbiorów ustalonego zbioru n-elementowego X losujemy kolejno ze zwracaniem trzy zbiory A, B, C. Za każdym razem wylosowaniekażdego spośród 2^n podzbiorów zbioru X jest jednakowo porawdopodobne. Wyznaczyć najbardziej prawdopodobną liczbę elementów zbioru $A \cap B \cap C$.

Rozwiązanie

Znajdźmy najpierw wzór na liczbę wszystkich uporządkowanych trójek podzbiorów zbioru X o ustalonej mocy ich części wspólnej. Niech ta moc wynosi k. Wówczas każdy z podzbiorów musi na pewno posiadać k takich samych elementów, a ze zbioru n-elementowego X możemy je ustalić na $\binom{n}{k}$ sposobów. W $A \cap B \cap C$ nie mogą ponadto wystąpić żadne z pozostałych, nieustalonych elementów X, czyli każdy z nich nie należy przynajmniej do jednego ze zbiorów A, B, C, a warunek ten można spełnić na 7 sposobów (nie występowanie tylko i wyłącznie w A, B, C, $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$ i $A \cup B \cup C$). Niepożądanych elementów przy ustalonych k jest $n - k$, tak więc liczba uporządkowanych trójek zbiorów, których część wspólna ma k elementów wynosi:

$$\binom{n}{k} 7^{n-k} \tag{1}$$

Nasze zadanie sprowadza się więc do znalezienia takiego k, dla którego przy ustalonym n wyrażenie (1) osiągnie wartość maksymalną, co z jednakowego prawdopodobieństwa wyboru każdego z podzbiorów zbioru X, jest tożsame ze znalezieniem najbardziej prawdopodobnej liczby elementów zbioru $A \cap B \cap C$.

Przy ustalonym n wartość wyrażenia (1) dla szukanego k to wartość największa tego wyrażenia określonego na zbiorze $\{0, 1, \ldots, n\}$, musi więc być większa lub równa od wartości wyrażenia dla argumentów przyległych ($k-1$, $k+1$) o ile istnieją. Otrzymujemy układ nierówności (przyjmujemy, że dla $k < 0$ lub $k > n$ zachodzi $\binom{n}{k} = 0$, bo na tyle sposobów można wybrać niemożliwą liczbę elementów):

$$\begin{cases} \binom{n}{k} 7^{n-k} \geqslant \binom{n}{k-1} 7^{n-(k-1)} \\ \binom{n}{k} 7^{n-k} \geqslant \binom{n}{k+1} 7^{n-(k+1)} \end{cases}$$

Podstawiając $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ i przekształcając równoważnie otrzymujemy, że $k \in \langle \frac{n-7}{8}; \frac{n+1}{8} \rangle$, a ponieważ powinno być całkowite, odpowiedź na pytanie o najbardziej prawdopodobną liczbę elementów zbioru $A \cap B \cap C$ to:

1. $\frac{n+1}{8}$ oraz $\frac{n-7}{8}$, gdy $8 \mid n+1$
2. $\left[\frac{n+1}{8}\right]$, gdy $8 \nmid n+1$

□

Zadanie **12.** Dane są funkcje

$$f(x) = 2^x \quad oraz \quad g(x) = f(f(f(f(f(f(f(x)))))))$$

(siedmiokrotna iteracja funkcji f). Rozstrzygnąć, czy liczba $g(3) - g(0)$ jest podzielna przez liczbę $g(2) - g(0)$.

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw następujący

Fakt

$$\begin{aligned} 2^a - 2^k \mid 2^b - 2^k \quad &\Leftrightarrow \quad 1\overbrace{0\ldots0}^{a}{}_{(2)} - 1\overbrace{0\ldots0}^{k}{}_{(2)} \mid 1\overbrace{0\ldots0}^{b}{}_{(2)} - 1\overbrace{0\ldots0}^{k}{}_{(2)} \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \overbrace{1\ldots1}^{a-k}\overbrace{0\ldots0}^{k}{}_{(2)} \mid \overbrace{1\ldots1}^{b-k}\overbrace{0\ldots0}^{k}{}_{(2)} \quad \Leftrightarrow \quad \overbrace{1\ldots1}^{a-k}{}_{(2)} \mid \overbrace{1\ldots1}^{b-k}{}_{(2)} \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad a - k \mid b - k \end{aligned}$$

gdzie indeks dolny (2) oznacza zapis w systemie binarnym.

Jeżeli przez $h(x, n)$ oznaczymy n-krotną iterację funkcji f ($h(x, n) = (\overbrace{f \circ \ldots \circ f}^{n})(x)$, a więc z definicji $h(x, n+1) = 2^{h(x,n)}$) wówczas na mocy powyższego faktu

$$\begin{aligned} g(2) - g(0) \mid g(3) - g(0) \quad &\Leftrightarrow \quad h(2,7) - h(0,7) \mid h(3,7) - h(0,7) \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad h(2,6) - h(0,6) \mid h(3,6) - h(0,6) \quad \Leftrightarrow \quad \ldots \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad h(2,1) - h(0,1) \mid h(3,1) - h(0,1) \quad \Leftrightarrow \quad 2^2 - 2^0 \mid 2^3 - 2^0 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad 2 \mid 3 \end{aligned}$$

co nie jest prawdą, a więc liczba $g(3) - g(0)$ nie jest podzielna przez liczbę $g(2) - g(0)$.

$\square$